

Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 6. Blatt

55. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma_i} dz \left(z + 1/z\right)^2$$

für die Kurven

γ_1 : (gerade) Strecke zwischen 1 und i

γ_2 : Kreisbogen mit Mittelpunkt 0 zwischen 1 und i .

auf folgende Arten:

- (a) durch explizite Berechnung,
- (b) mit Hilfe einer Stammfunktion.

56. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$$

mit Hilfe komplexer Integration.

57. Verwenden Sie das Resultat des vorigen Beispiels, um

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \geq 1$$

zu berechnen.

Hinweis: Differenzieren Sie nach dem Parameter $\lambda = a^2$.

58. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$$

mit Hilfe komplexer Integration.

59. Um den Wert des folgenden Integrals anzugeben, ist **keine** Rechnung nötig:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^3}{x^8 + 1}$$

60. Bestimmen Sie die Residuen an den singulären Stellen der folgenden Funktionen:

$$\frac{1}{1-z}, \quad \frac{1}{z^2-1}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \frac{z}{z^4-1}, \quad \frac{1}{1-e^z}, \quad \cot z.$$

61. Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei γ der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis ist:

$$\int_{\gamma} dz e^{1/z}, \quad \int_{\gamma} dz \cot z, \quad \int_{\gamma} dz \frac{1}{\sin z}, \quad \int_{\gamma} dz \frac{1}{1-e^z}.$$

62. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^6+1}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{(x^2-2x+2)^2},$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-3\cos\theta}, \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k+\cos\theta}, \quad k > 1.$$