Übungen zu T2, SS 2007, Blatt 7

38) Betrachte die Eigenzustände von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_3$:

a) Berechne das Schwankungsquadrat von $\hat{L}_1$ bzw. $\hat{L}_2$.

b) Überprüfe die Unschärferelation zwischen $\hat{L}_1$ und $\hat{L}_2$ und zeige, dass für $m = l$ die Unschärfe minimal ist.

39) Betrachte die Operatoren $\hat{X}_\pm := \hat{x}_1 \pm i\,\hat{x}_2$ und $\hat{L}_\pm := \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$:

a) Zeige

$$\left[\hat{L}_3\,,\,\hat{X}_\pm\right] = \pm\hat{X}_\pm, \quad \left[\hat{L}_\pm\,,\,\hat{X}_\pm\right] = 0\,.$$

b) Zeige

$$\left[\hat{\vec{L}}^2 - \hat{L}_3^2 - \hat{L}_3\,,\,\hat{X}_+\right] = \left[\hat{L}_-\,,\,\hat{X}_+\right]\hat{L}_+\,.$$

c) Mit Hilfe der obigen Relationen zeige, dass

$$\hat{X}_+|l,l\rangle = N|l+1,l+1\rangle\,,$$

wobei $|l,l\rangle$ Eigenzustand zu $\hat{\vec{L}}^2$ mit Eigenwert $l(l+1)$ und zu $\hat{L}_3$ mit Eigenwert $m = l$ ist.

d) Normiere $\hat{X}_+|l,l\rangle$ (d.h. bestimme die Normierungskonstante N).

e) Zeige, dass sich der Zustand $|l,m\rangle$ durch Anwendung von $\hat{X}_+$ und $\hat{L}_-$ auf $|0,0\rangle$ erzeugen lässt.

40) Berechne die Matrixelemente ($i = 1,2,3$)

$$\left\langle l=1,m' \middle| \hat{L}_i \middle| l=1,m \right\rangle\,.$$

41) Verwende das Resultat von Bsp. 39e um die Kugelfunktionen $Y_{1,1}$, $Y_{1,0}$ und $Y_{1,-1}$ explizit aus $Y_{0,0}$ zu erzeugen.